

$$(i) \quad f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$$

(d.h. $f^{(1)}, \dots, f^{(k)}$ existieren und sind stetig auf U)

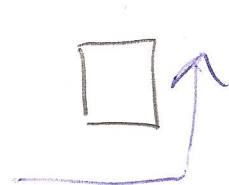
(ii) für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq k$, existieren die partiellen Ableitungen

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \left(\dots \left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f \right) \dots \right)$$

und sind stetig.

Beweis: Induktion nach k ;

Induktionsanfang $k=1$: Satz 18.4

□  Lektion
1

Formel :

$$f^{(k)}(a)(v, \dots, v) = \frac{d^k}{dt^k} f(a+tv)$$

Beweis: $k=1$

$$f'(a)(v) = \partial_v f(a) = \frac{d}{dt} f(a+tv);$$

$k=2$: wie oben gilt (f' statt f)

$$(f')'(a)v = \frac{d}{dt} f'(a+tv) \quad (*)$$



$$f''(a)(v,v) = [f^{(2)}(a)v](v) \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} f'(a+tv) \right](v) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} f(a+tv) \right] \\ &= \frac{d^2}{dt^2} f(a+tv) \end{aligned}$$



benutze $f'(a+tv)v = \frac{d}{dt} f(a+tv)$
nach z.B. "Leibnizregel"

~~→~~

~~10.10.~~

~~NRW~~

~~NRW~~

Zusammenfassung:

$$\begin{cases} \varphi: X \supset U \rightarrow Y, & U \text{ offen ,} \\ \dim X, Y < \infty \end{cases}$$

$\varphi'(x) :=$ total Ableitung von φ in x

$$\begin{cases} \varphi'(x) \in L(X, Y), \\ \varphi'(x)u \in Y \quad \forall u \in X \end{cases} \quad \boxed{\varphi'(x)u = \frac{d}{du} \varphi(x)}$$

betrachte die Abbildung

$$\varphi': U \rightarrow L(X, Y), \quad x \mapsto \varphi'(x)$$

für $a \in U$ ist

$$f^{(2)}(a) = f''(a) : X \rightarrow L(X, L(X, Y))$$

linear, d. h.:

$$f''(a)(u) \in L(X, Y) \quad \forall u \in X$$

$$\Rightarrow [f''(a)(u)](v) \in Y \quad \forall u, v \in X$$

↑

linear in u und v

Notation dafür: $f''(a)(u, v)$ oder

$$D^2 f(a)(u, v)$$

20.1: $D^2 f(a)(u, v)$ symmetrisch

und $D^2 f(a)(u, v) = \partial_v (\partial_u f)(a).$

analog: $D^k f(a), \quad k \geq 2$

Zeige selbst:

$$f^{(k)}(a)(v, \dots, v) = \frac{d^k}{dt^k} \bigg|_0 f(a + tv).$$

Euklidischer Fall:

$$X = \mathbb{R}^n, \quad Y = \mathbb{R}^m$$

20.2 : $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m) \iff$

$$\partial^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

existiert für $|\alpha| \leq k$ und ist
stetig auf U

Beweis: Induktion nach k

Induktionsanfang $k = 1$: Satz 18.4

Anwendung:

$$\textcircled{1} \mathbb{R}^n \ni x \mapsto \exp\left(\frac{1}{1-|x|^2}\right),$$

$|\cdot|$ = Euklidische Norm,

ist aus $C^\infty(B_1(0), \mathbb{R})$ [berechne
die partiellen Ableitungen mit Kettenregel]

$$\textcircled{2} (x_1, x_2) \mapsto \sin(\ln[x_1^2 + x_2^2])$$

ist $C^\infty(\mathbb{R}^2 - \{0\}, \mathbb{R})$

$$\textcircled{3} \mathbb{R}^n \ni x \mapsto |x|^\alpha = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\alpha/2}$$

für ein $\alpha \in (1, 2)$ ist nur

aus $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

"Taylor" für (reellwertige) Funktionen
in n Variablen :

[benötigt z.B. für Extremwertdiskussion]

Satz 20.3: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$f \in C^{\ell+1}(U, \mathbb{R})$$

für ein $\ell \geq 1$. Seien $a \in U$,
 $v \in \mathbb{R}^n$, und es gelte

$$a + tv \in U \quad \forall 0 \leq t \leq 1$$

Dann ist

$$f(a+v) = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} \overbrace{f^{(k)}(a)}^{k\text{-fach}}(v, \dots, v) + R_{a,\ell}(v)$$

mit dem Restglied

$$R_{a,l}(v) := \frac{1}{(l+1)!} f^{(l+1)}(a + \vartheta v) \underbrace{(v, \dots, v, v)}_{l+1 \text{ f\ddot{a}ch}}$$

für ein $\vartheta \in (0, 1)$.

Bem: ① erinnere: $f^{(k)}(b)$ ist eine
 k -lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

es gilt



$$\begin{aligned} f^{(k)}(b)(w, \dots, w) &= \partial_w (\dots (\partial_w f) \dots)(b) \\ &= \left. \frac{d^k}{dt^k} f(b + tw) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

② es gilt die Integraldarstellung des

Restglieds (s.u.)

$$R_{a,l}(v) = \frac{1}{l!} \int_0^1 (1-t)^l f^{(l+1)}(a+tv)(v, \dots, v) dt$$

③ $f \in C^\infty(U), a \in U \implies$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (x-a, \dots, x-a)$$

die "formale Taylorreihe" in a
ist bildbar

④ f reell analytisch auf U : $\iff$

für jedes $a \in U$ konvergiert die formale
Taylor-Reihe (in a) auf einer Umgebung
von a gegen f

Beweis von 20.3:

Sei $\overline{f}(t) := f(a+tv)$, $0 \leq t \leq 1$;

$$f \in C^{l+1} \implies \overline{f} \in C^{l+1};$$

Taylor für $\overline{f} \implies \exists \vartheta \in (0,1)$ mit

$$\begin{aligned} \overline{f}(1) &= \sum_{k=0}^l \frac{1}{k!} \overline{f}^{(k)}(0) (1-0)^k \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{(l+1)!} \overline{f}^{(l+1)}(\vartheta) (1-0)^{l+1}}_{=: r_l} \end{aligned}$$

bzw. (Integralform des Restglieds r_l)

$$r_l = \frac{1}{l!} \int_0^1 \overline{f}^{(l+1)}(t) (1-t)^l dt$$

nun beachte

$$\overline{f}^{(k)}(t) = f^{(k)}(a+tv) \underbrace{(v, \dots, v)}_{k\text{-fach}}$$

□

LOKALE EXTREMA

Def 20.3 : Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}.$$

i) $x_0 \in U$ lokales Maximum (Minimum)

von f : $\iff \exists r > 0$ mit

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

($\geq$)

x_0 heißt strikt lokales Max,

falls $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in B_r(x_0) - \{x_0\}$

ii) Sei f diff'bar auf U . Dann
heißt $x_0 \in U$ kritischer Punkt von f ,

falls $f'(x_0) = 0$ ist.

[Es gilt dann also $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right)_{1 \leq i \leq n} = 0$]

SATZ 20.4: Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ diff'bar
und x_0 lokales Max. (Min) von f .
Dann ist x_0 ein kritischer Punkt.

Der Beweis zeigt genau:

$$\begin{aligned}
 & a \in U \text{ lokaler Extremwert von } f \\
 & \Rightarrow \partial_v f(a) = 0 \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n, \\
 & \text{für die } \partial_v f(a) \text{ existiert}
 \end{aligned}$$

Beweis von 20.4: Sei x_0 lok. Max. $\Rightarrow$

$$f(x_0 + t v) \leq f(x_0)$$

für $v \in \mathbb{R}^n$ und $|t| \ll 1 \quad \Rightarrow$

$$\frac{f(x_0 + t v) - f(x_0)}{t} \begin{cases} \geq 0, & \text{falls } t < 0 \\ \leq 0, & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \partial_v f(x_0) = 0.
 \end{aligned}$$



Beispiel : $f(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$
auf $U := \mathbb{R}^2$

(offenbar $f \in C^\infty$)

Kritische Punkte:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 - 3y \stackrel{\nabla}{=} 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 3y^2 - 3x \stackrel{\nabla}{=} 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Lösungen} \\ (0, 0), (1, 1) \end{array}$$

Kein lokaler Extremwert in $(0, 0)$:

$$f(x, 0) = x^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} < 0, x < 0 \\ > 0, x > 0 \end{array} \right\},$$

$$f(0, 0) = 0$$

f nimmt in jeder Umgebung von $(0, 0)$
sowohl positive als auch negative Werte an

f hat keine absoluten Extrema auf $\mathbb{R}^2$:

$$\left. \begin{aligned} f(n, 0) &= n^3 \rightarrow \infty \\ f(-n, 0) &= -n^3 \rightarrow -\infty \end{aligned} \right\} \text{ bei } n \rightarrow \infty$$

Was passiert in (1,1)? Hier benötigt man schärfere Kriterien, etwa Aussagen über das Verhalten von

$$f^{(2)}(x, y) \triangleq \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x f & \partial_x \partial_y f \\ \partial_x \partial_y f & \partial_y \partial_y f \end{pmatrix} (x, y)$$

im Punkt $(x, y) = (1, 1)$.

Einschub aus der Algebra:

$X = \mathbb{R}$ -V.R. mit $\dim X < \infty$;

$B: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine symm. Bilinearform
 $B(u, v) = B(v, u)$

$$Q: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(v) := B(v, v)$$

-26-

zugehörige quadratische Form;

Notation : bzw. B

Q positiv definit : $\Leftrightarrow Q(v) > 0 \quad \forall v \neq 0$

-//- semi definit : $\Leftrightarrow Q(v) \geq 0 \quad \forall v$

(entsprechend mit "negativ")

Q indefinit : $\Leftrightarrow \exists v, w \neq 0$ mit

$$Q(v) > 0, \quad Q(w) < 0$$

Spezialfall : $X = \mathbb{R}^n$

gegeben eine symmetrische $(n \times n)$ -Matrix

$$A := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

zugehörige Bilinearform (symm!)

$$B(v, w) := \sum_{i, j=1}^n a_{ij} v_i w_j$$

mit $Q(v) := \sum_{i, j=1}^n a_{ij} v_i v_j$

Wie erkennt man mögliches Definitheits-
verhalten von Q an den a_{ij} ?

A symm. $\implies \exists$ ONB $\xi_1, \dots, \xi_n$
von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus E.V. von A , d.h.

$$A(\xi_i) = \lambda_i \xi_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Für $w \in \mathbb{R}^n$ mit der Darstellung

$$w = \sum_{i=1}^n w_i \xi_i$$

folgt:

$$Q(w) = A w \cdot w =$$

$$\sum_{i,j=1}^n A(w_i, \xi_i) \cdot w_j \xi_j =$$

$$\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \lambda_i$$

Ergebnis : bzw. B

- Q positiv definit $\iff$ alle EW > 0
- Q positiv semidefinit $\iff -||- \geq 0$

..... "negativ"

- Q indefinit $\iff$

$$\exists \text{ EW } < 0 \text{ und } > 0$$